ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1980

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 Heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES, DES REGLES A CALCUL ET DES CALCULATRICES ELECTRONIQUES PORTATIVES, NON IMPRIMANTES, A ALIMENTATION AUTONOME ET SANS DOCUMENT D'ACCOMPAGNEMENT, EST AUTORISE.

- *Les copies illisibles, mal présentées ou mal rédigées seront inévitablement pénalisées.*
- *Chaque candidat doit traiter les deux problèmes de l'épreuve. Ces deux problèmes sont indépendants.*
- *Chaque candidat indiquera sur chaque copie le numéro de celle-ci suivi du nombre total de copies rendues (Exemple : copie 1/3).*

Les candidats originaires des "classes TA" n'ont pas à traiter les questions précédées d'un astérisque.

PREMIER PROBLEME

Dans le plan des complexes on considère la transformation qui, au point m d'affixe z, différent de l'origine O, fait correspondre le point M d'affixe Z telle que :

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1°/ a) Quels sont les points invariants par cette transformation ?

b)- Quel est l'ensemble décrit par M quand m décrit le cercle de centre O et de rayon R ?

- Quel est l'ensemble décrit par M quand m décrit une droite passant par O ?

(On obtiendra en général des coniques dont on précisera les foyers).

2°/ Exprimer $\frac{Z - 1}{Z + 1}$ en fonction de $\frac{z - 1}{z + 1}$.

3°/ Soit z_o un nombre complexe et soit la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right)$$

a) A quelle condition sur z_o définit-on ainsi une suite de nombres complexes $\left(z_n\right)_{n \geq o}$?

b) Discuter selon z_o la nature de la suite $\left(z_n\right)_{n \geq o}$ lorsqu'elle est définie.

Dans quels cas est-elle périodique ?

Interpréter géométriquement les résultats selon la position du point m_o d'affixe z_o.

II.– 1°/ z étant un nombre complexe, on appelle m le point d'affixe z.

a) Soit θ un nombre réel. Quel est l'ensemble C_θ décrit par m lorsque l'argument de $(z^2 - 1)$ reste constant et égal à θ modulo 2π ?

b) Soit r un nombre réel positif ou nul. Trouver l'équation cartésienne de l'ensemble G_r décrit par m lorsque le module de $(z^2 - 1)$ reste constant et égal à r.

✱ 2°/ Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$U = \left\{(x, y) \; ; \; x \neq 0 \, , \, y \neq 0\right\}$$

a) trouver une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non identiquement nulle, telle que la forme différentielle ω définie par :

$$\omega(x, y) = f(xy)\left[y(x^2 + y^2 + 1)\,dx - x(x^2 + y^2 - 1)\,dy\right]$$

soit une forme différentielle exacte sur U.

b) Déterminer alors une fonction φ différentiable sur U telle que :

$$d\varphi = \omega$$

c) Que peut-on dire des courbes H_k d'équations :

$$\varphi(x, y) = k$$

où k est une constante réelle ?

✱ 3°/ Déterminer les trajectoires orthogonales des courbes H_k.

Que remarque-t-on ?

. . ./. . .

DEUXIEME PROBLEME

Pour tout nombre réel α, on considère la fonction f_α de la variable réelle x telle que :

$$f_\alpha(x) = \frac{4x}{\alpha + \text{Log}\left|\frac{x}{x-4}\right|}$$

1°/ a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de f_α.

b) Montrer que l'on peut prolonger f_α par continuité en deux points n'appartenant pas à $\mathcal{D}_\alpha$.
On notera $\overline{f_\alpha}$ la fonction ainsi obtenue par prolongement.

c) La fonction $\overline{f_\alpha}$ est-elle dérivable en ces deux points ?

2°/ Etant donné un repère d'axes orthonormés (Ox , Oy), on appelle C_α la courbe représentative de $\overline{f_\alpha}$ dans ce repère.

Etudier les branches infinies de C_α . En particulier, donner le développement limité généralisé de $\overline{f_\alpha}(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de l'infini. Discuter suivant les valeurs de α.

3°/ Calculer la dérivée f'_α de f_α sur $\mathcal{D}_\alpha$ et la mettre sous la forme :

$$f'_\alpha(x) = \frac{4\,g(x)}{\left(\alpha + \text{Log}\left|\frac{x}{x-4}\right|\right)^2}$$

Etudier les variations de la fonction g ainsi obtenue.

En déduire le nombre de racines de l'équation $\overline{f'_\alpha}(x) = 0$ et préciser sur quels intervalles se trouvent ces racines.

4°/ a) Déduire de ce qui précède les tableaux de variations de $\overline{f_\alpha}$ pour $\alpha = \text{Log } 8$, $\alpha = \text{Log } 6$, $\alpha = 0$ et $\alpha = 2$.

b) Construire les courbes C_α correspondantes en prenant 1 cm pour unité.

./.

II.– On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad x(x-4)(xy' - y) = y^2$$

1°/ Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$ et $]4, +\infty[$.
(On pourra poser $y = tx$ et déterminer la fonction t de x).

2°/ m étant un nombre réel, on note Γ_m l'isocline de (E) relative à m, c'est-à-dire l'ensemble des points des diverses courbes intégrales de (E) en lesquels la tangente a pour coefficient directeur m.

a) Trouver une représentation paramétrique de Γ_m à l'aide du paramètre $u = \frac{y}{x}$.

b) Etudier les branches infinies de Γ_m. En particulier, chercher des courbes asymptotes simples (droites ou paraboles) et préciser la position de Γ_m par rapport à ces courbes. Discuter au besoin suivant les valeurs de m.

c) Caractériser Γ_0.
Etudier et représenter Γ_1. Préciser la nature du point singulier.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail